Vectores

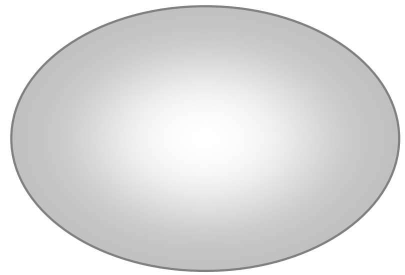
Marco A. Merma Jara
http://mjfisica.net
Versión: 08.2013

Contenido

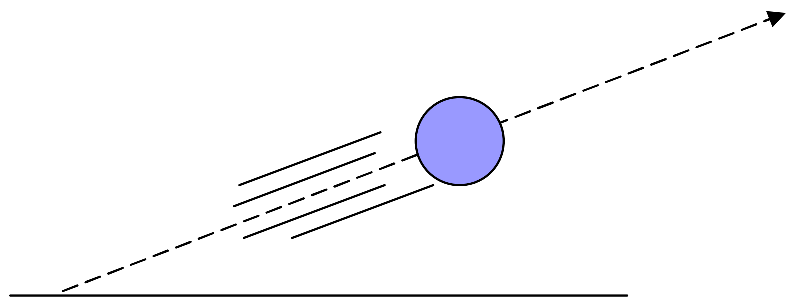
- Definición
- Representación de vectores
- Magnitud de un vector
- Componente de un vector
- Vector componente
- Dirección de un vector
- Expresión cartesiana de un vector
- Operaciones con vectores

Introducción

- Magnitudes escalares
  - Magnitud
  - Unidad de medida
- Magnitudes vectoriales
  - Magnitud
  - Dirección



50 kg



V= 300 m/s , NO

Vector

- Entidad matemática
  - Módulo (magnitud)
  - Dirección (incluye sentido)
- Existe en el campo de los vectores
  - Campo matemático

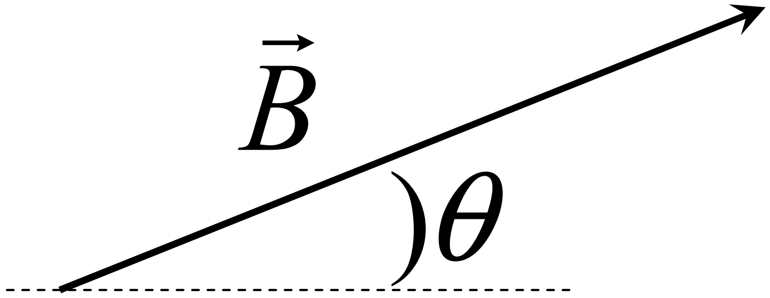
Vector

Representación de un vector

- Analítica (coordenadas)

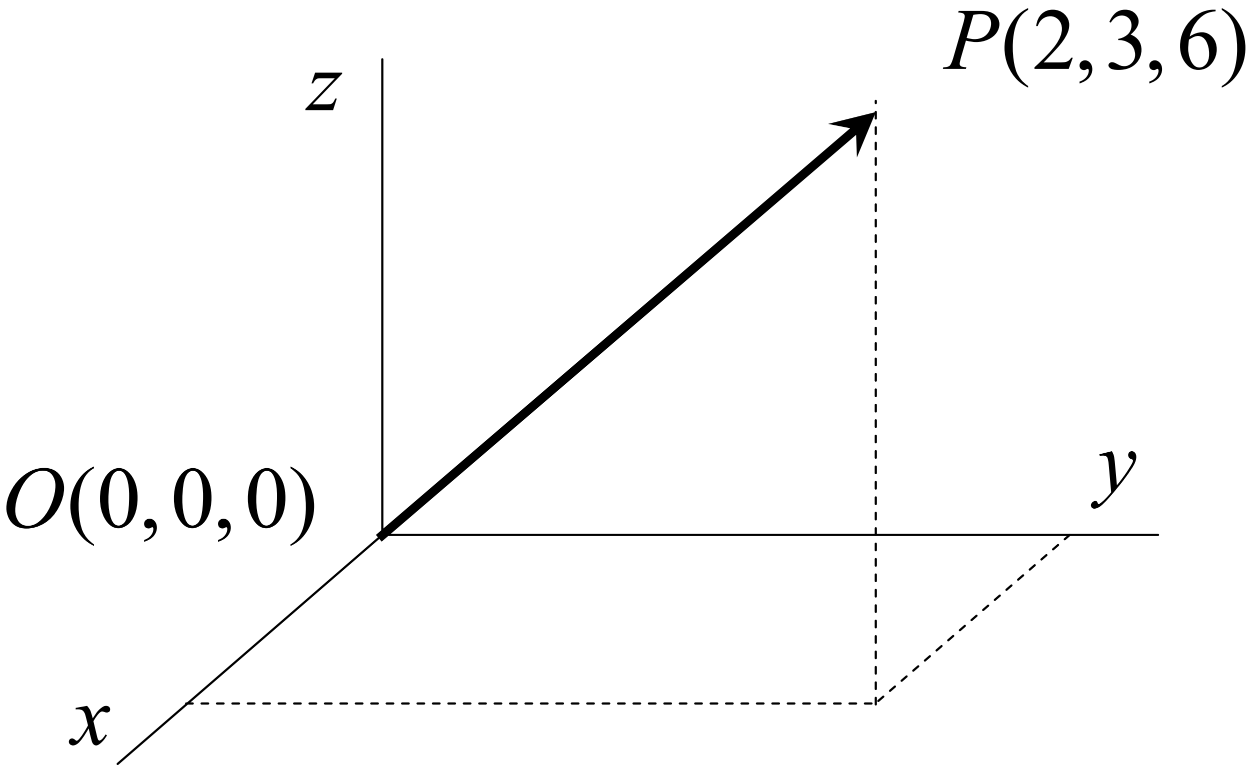
$$A(2,4,-7)$$

- Geométrica (segmento de recta orientada)



Vector

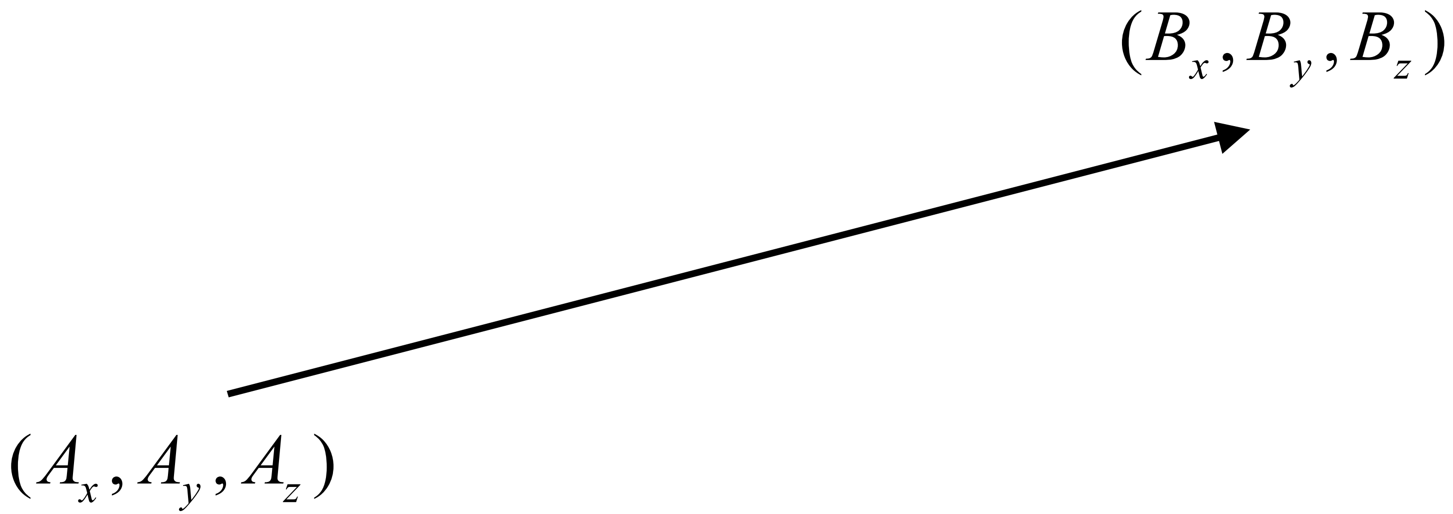
- Representación Analítica



$$\overrightarrow{OP} = P - O = (2,3,6) - (0,0,0) = (2,3,6)$$

Vector

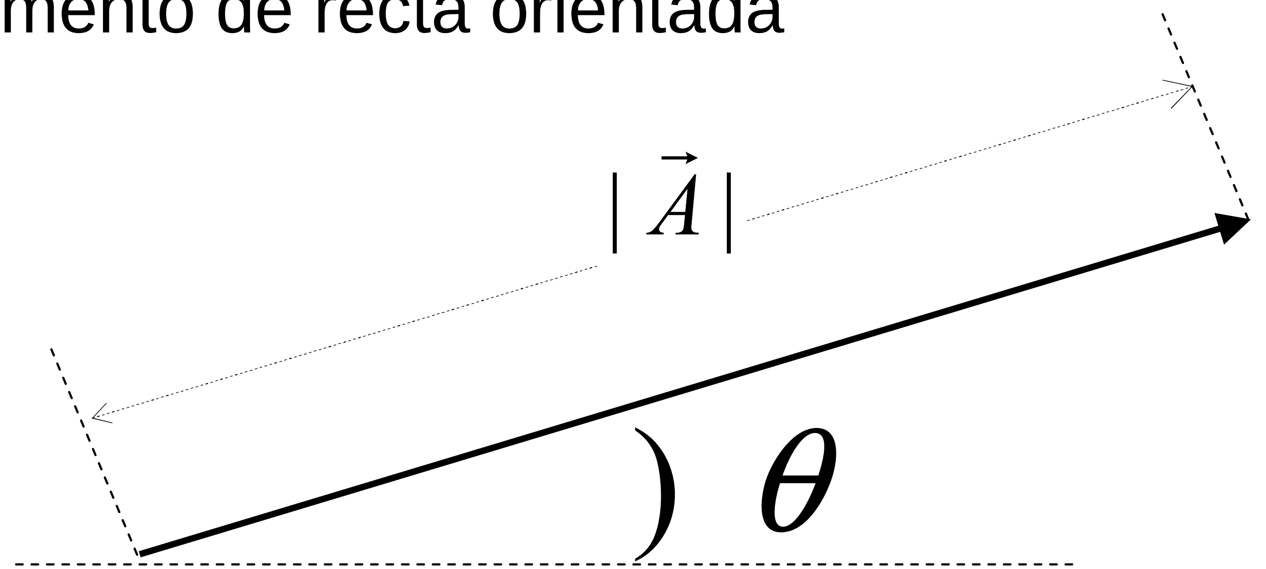
- Representación analítica en general



$$\overrightarrow{AB} = B - A = (B_x - A_x, B_y - A_y, B_z - A_z)$$

Vector

- Representación geométrica
  - Segmento de recta orientada

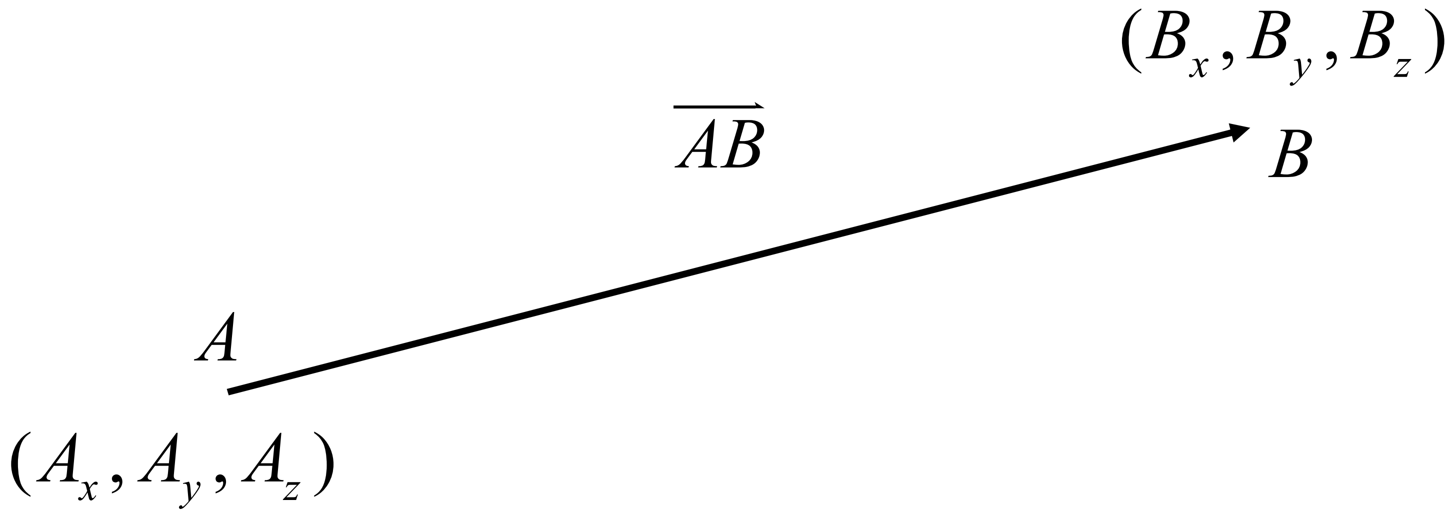


$|\vec{A}|$ Módulo del vector A

θ Dirección del vector A

Vectores

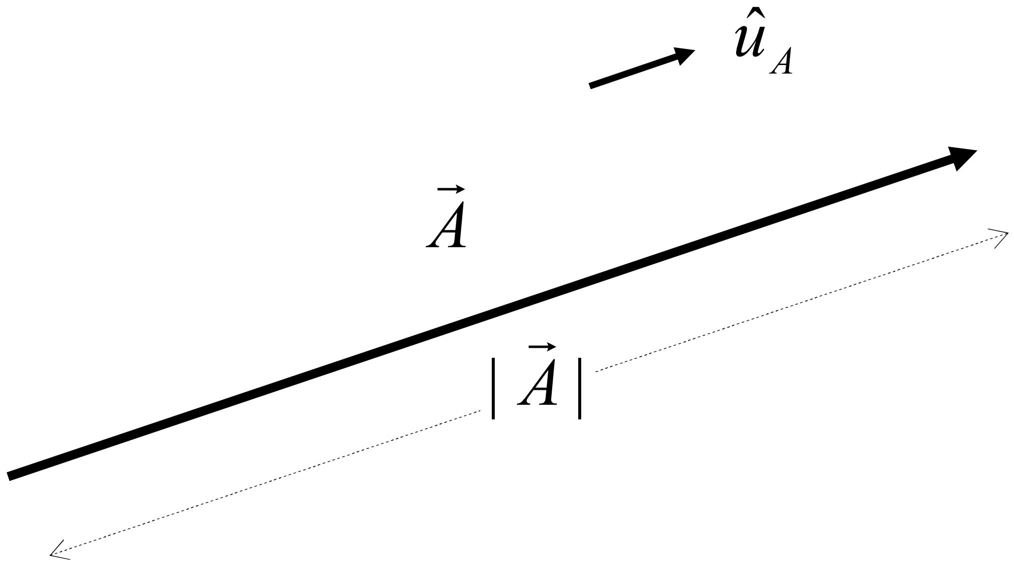
- Magnitud de un vector



$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(B_x - A_x)^2 + (B_y - A_y)^2 + (B_z - A_z)^2}$$

Vectores

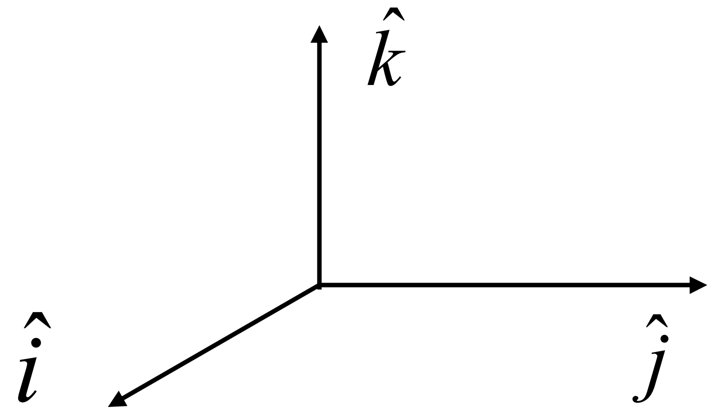
- Vector unitario
  - Magnitud es la unidad
  - Da dirección a un segmento
  - Esta en la misma dirección del vector



$$\hat{u}_A = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

Vectores

- Vectores unitarios cartesianos
  - Mutuamente perpendiculares
  - Magnitud y dirección constantes



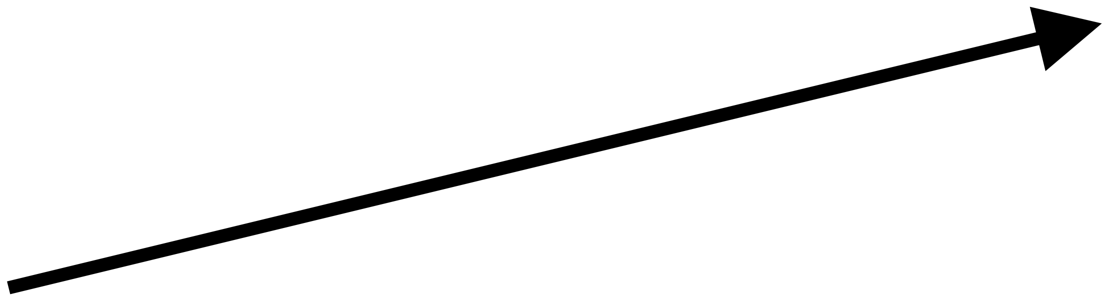
$$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$$

Vectores unitarios en los ejes x,y,z respectivamente

Vectores

- Expresión cartesiana de un vector

$$(A_x, A_y, A_z)$$



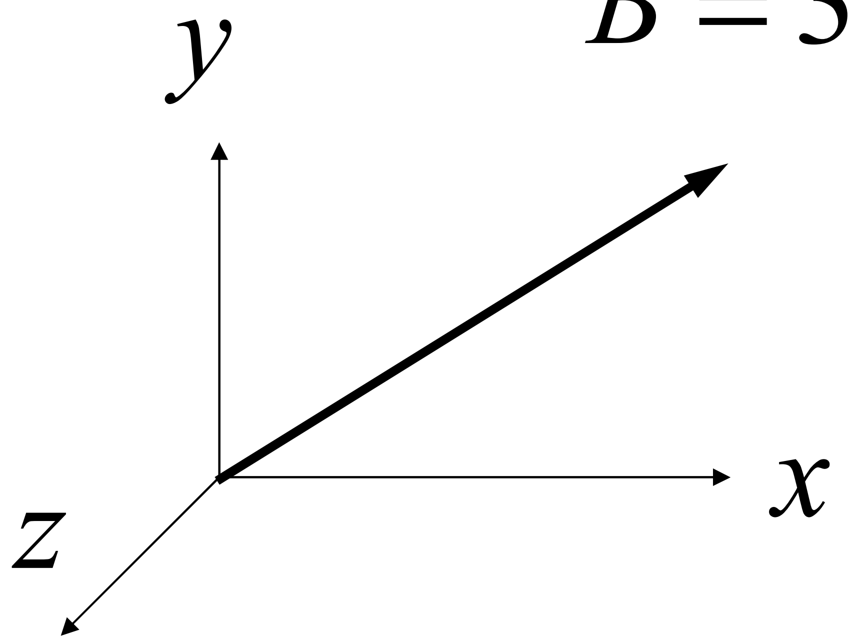
$$(0,0,0)$$

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

Ejemplo

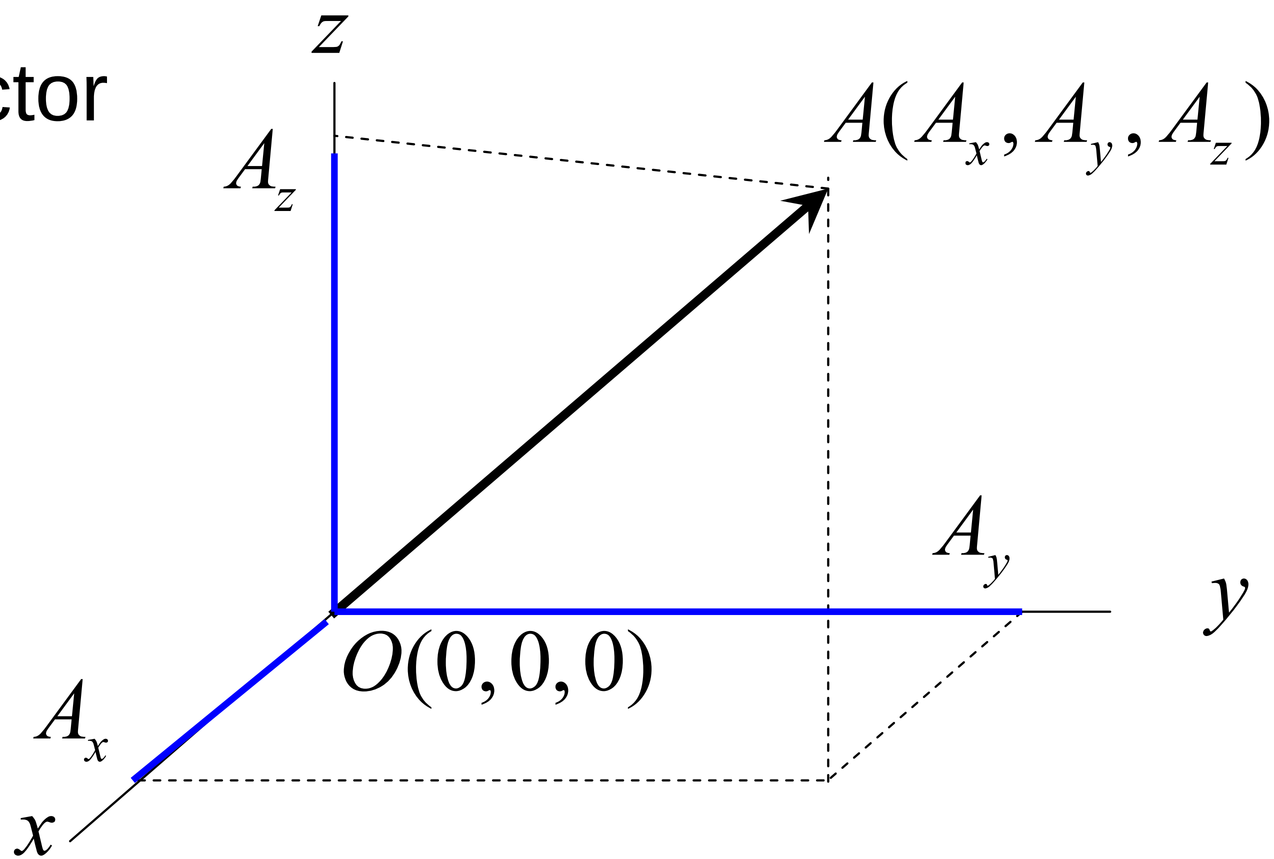
- Expresión Cartesiana

$$\vec{B} = 3\hat{i} + 5\hat{j} + 8\hat{k}$$



Componentes de un vector

- Si A es un vector



$$A_x \;,\; A_y \;\; A_z : Componentes \;\; del \;\; vector \;\; \vec{A}$$

Componentes de un vector

- Si **B** es un vector

$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$$

Componente En el eje x

Componente En el eje y

Componente En el eje z

La componente de un vector es una **longitud**

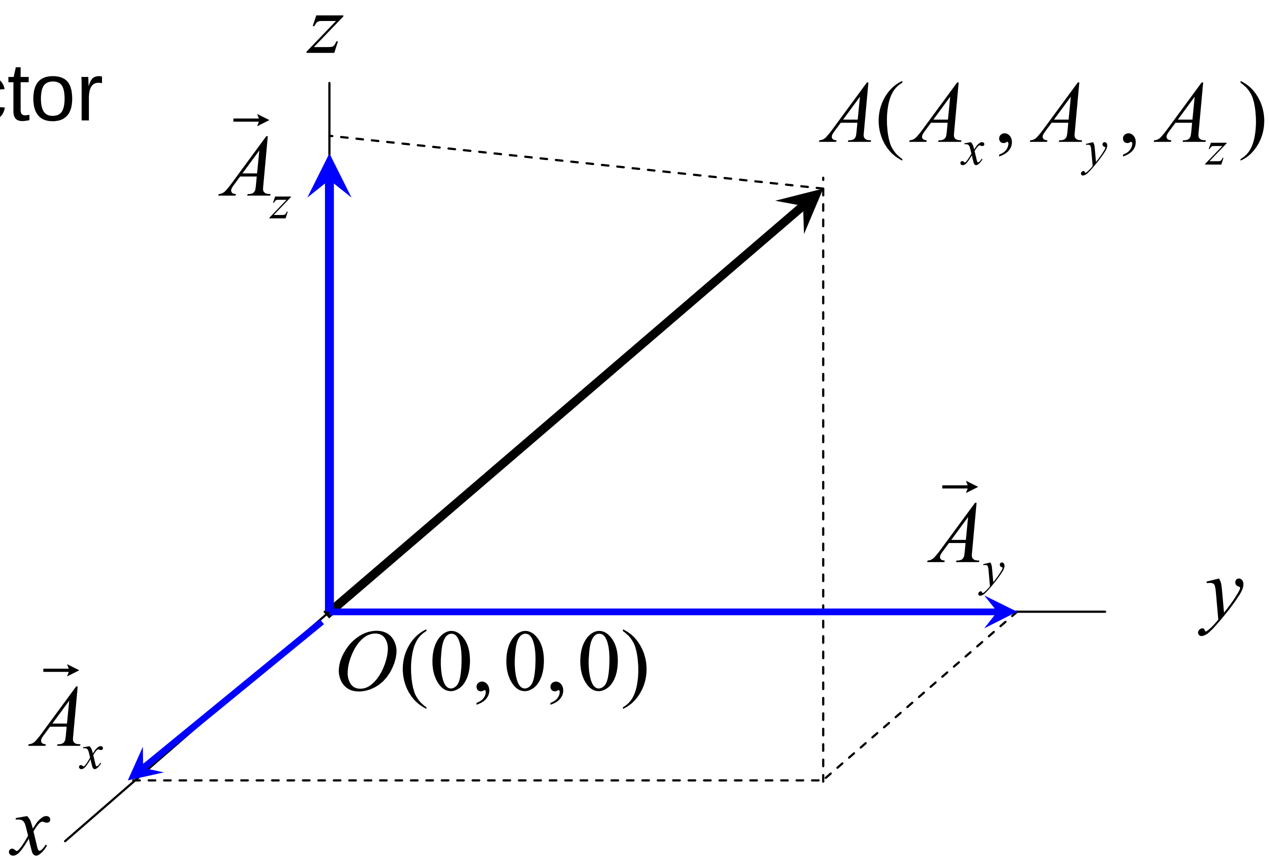
Vector componente

- Si A es un vector

$$\vec{A}_x = A_x\hat{i}$$

$$\vec{A}_y = A_y\hat{j}$$

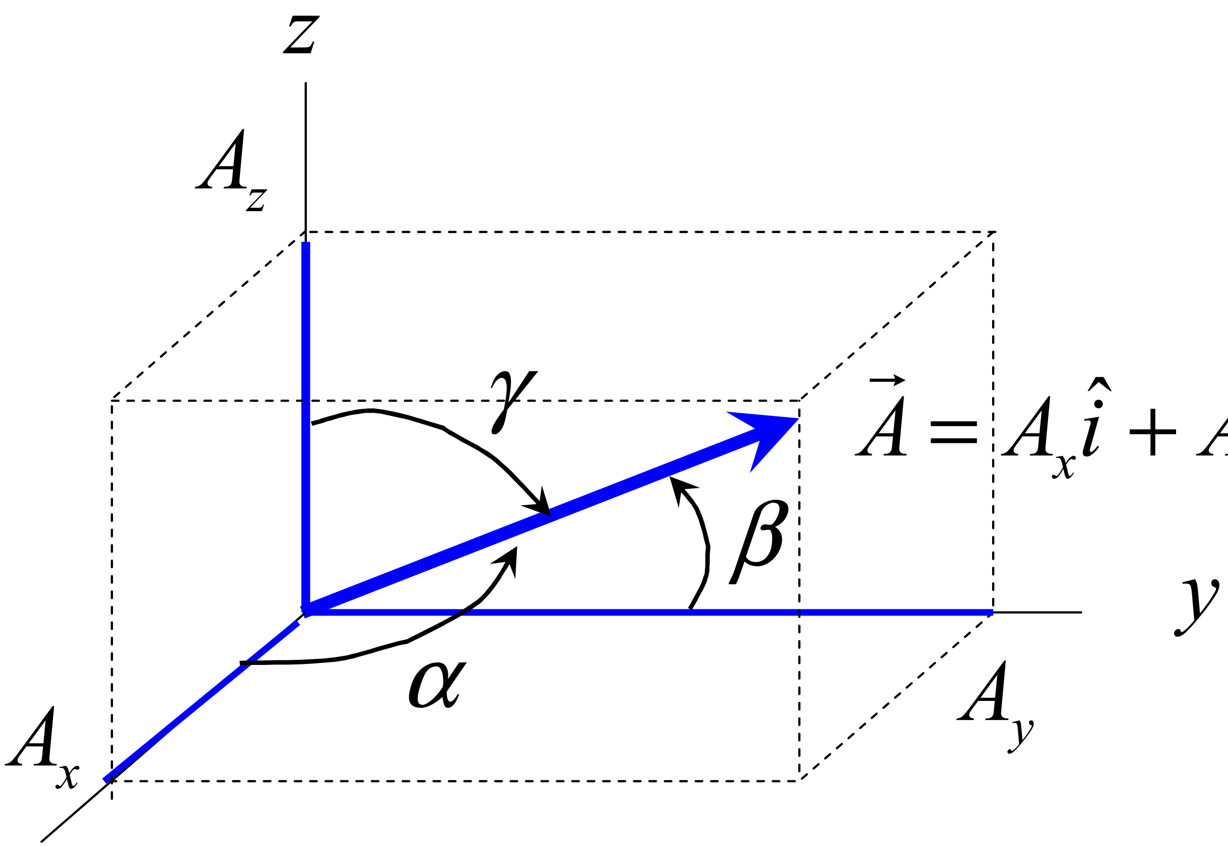
$$\vec{A}_z = A_z\hat{k}$$



$\vec{A}_x, \vec{A}_y, \vec{A}_z$	Vectores componentes en los ejes x,y,z

Dirección de un Vector

- En 3D



$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

$$\alpha, \beta, \gamma : \acute{a}ngulos \;\; directores$$

Cosenos Directores

- Si A es un vector en 3D

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

- Módulo

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

- Vector Unitario

$$\hat{u}_A = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{A_x}{|\vec{A}|}\hat{i} + \frac{A_y}{|\vec{A}|}\hat{j} + \frac{A_z}{|\vec{A}|}\hat{k}$$

Cosenos Directores

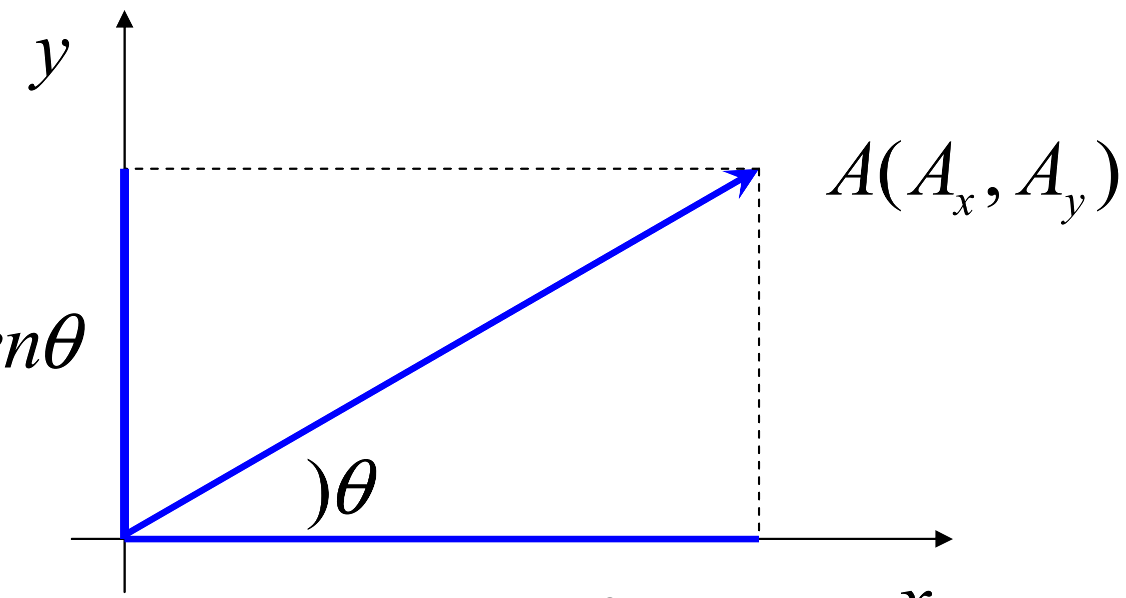
- Si $\hat{u}_A$ es el vector unitario del vector A

$$\hat{u}_A = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{A_x}{|\vec{A}|}\hat{i} + \frac{A_y}{|\vec{A}|}\hat{j} + \frac{A_z}{|\vec{A}|}\hat{k}$$

$$\cos\alpha \qquad \cos\beta \qquad \cos\gamma$$

Dirección de un vector

- En 2D



$$A_y = A sen\theta$$

$$A_x = A\cos\theta$$

$$tg\,\theta = \frac{A_y}{A_x}$$

$$\boxed{\theta = arc\,tg\left(\frac{A_y}{A_x}\right)}$$

Operaciones con vectores

- En el campo de los vectores
  - Suma (Resta)
  - Producto
    - Escalar
    - Vectorial
  - No está definido
    - División de Vectores

Suma y Resta de Vectores

- Suma y Resta Método Analítico
- Si **A** y **B** son vectores
- **S** es el vector Suma
- **D** es el vector resta

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$

$$\vec{S} = \vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} + (A_z + B_z)\hat{k}$$

$$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B} = (A_x - B_x)\hat{i} + (A_y - B_y)\hat{j} + (A_z - B_z)\hat{k}$$

Suma y Resta de Vectores

- Ejemplo

$$\vec{A} = 4\hat{i} + 6\hat{j} - 10\hat{k}$$

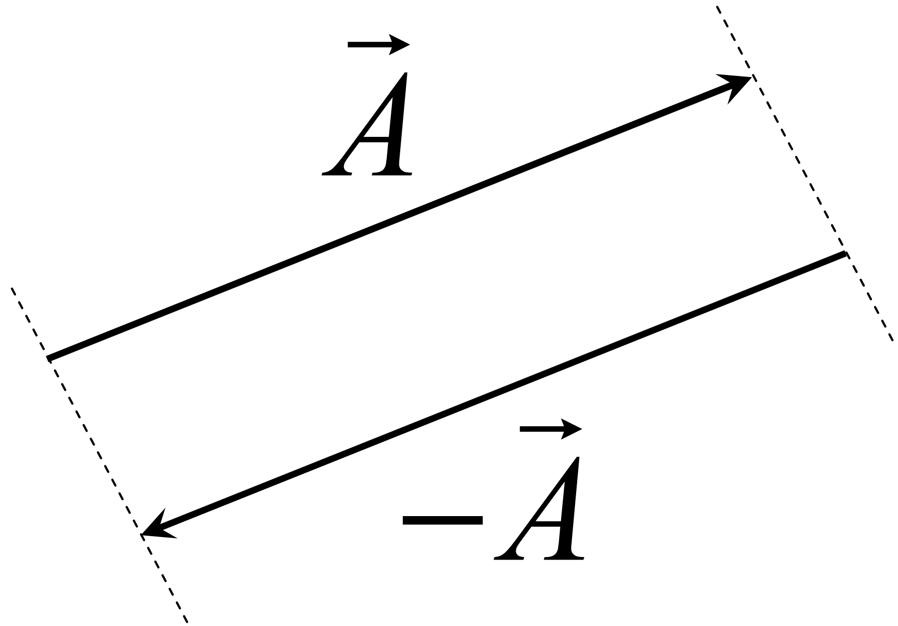
$$\vec{B} = -3\hat{i} + 8\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\vec{S} = \vec{A} + \vec{B} = (4 - 3)\hat{i} + (6 + 8)\hat{j} + (-10 + 2)\hat{k}$$

$$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B} = (4 + 3)\hat{i} + (6 - 8)\hat{j} + (-10 - 2)\hat{k}$$

Suma y Resta

- Vector negativo
  - Si **A** es un vector, entonces existe un vector –**A**, talque **A+ (-A) = 0**



Producto de Vectores

- Producto escalar
  - **A**, y **B** son vectores
- Se denomina también
  - Producto Punto
  - Producto Interno

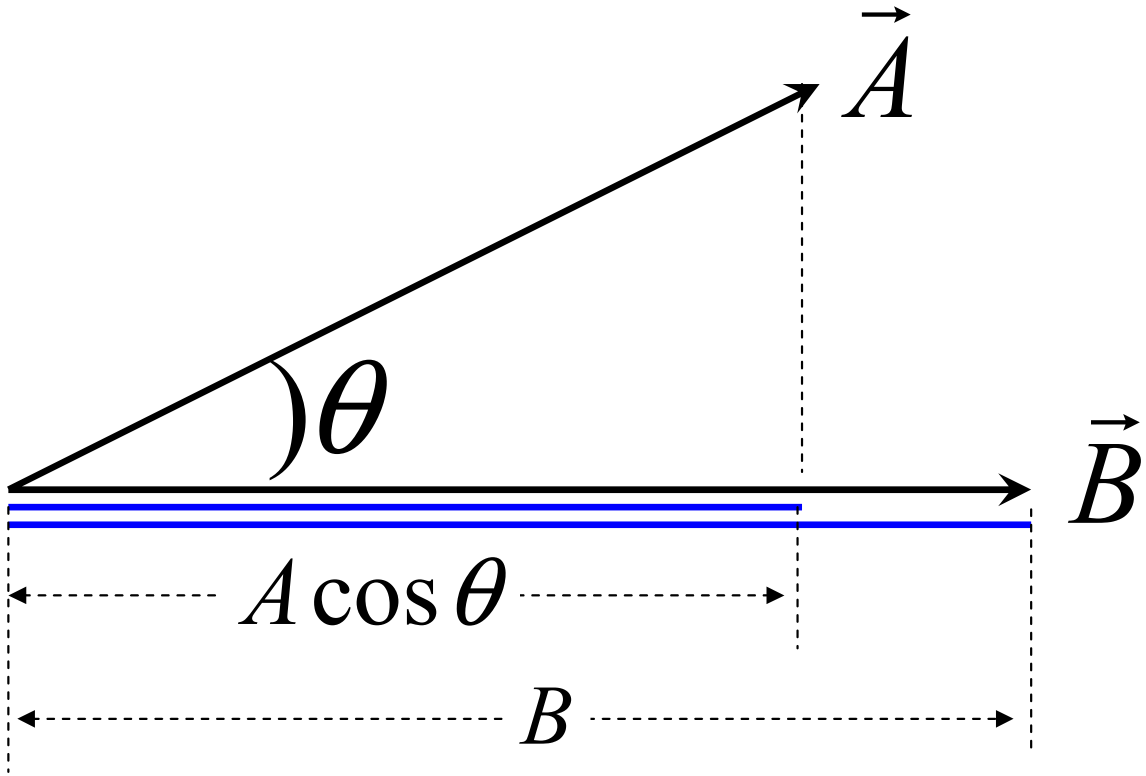
$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$$

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Producto escalar

- Interpretación Geométrica



$$\vec{A}\bullet\vec{B}=(A\cos\theta)B=AB\cos\theta$$

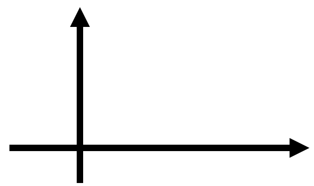
La contribución del vector **A** en la dirección del vector **B**

Producto Escalar

- Propiedades

$$\hat{i}\bullet\hat{i}=\hat{j}\bullet\hat{j}=\hat{k}\bullet\hat{k}=1$$

$$\hat{i}\bullet\hat{j}=\hat{j}\bullet\hat{k}=\hat{k}\bullet\hat{i}=0$$



$$\vec{A}\bullet\vec{A}=\left|A\right|^2=A^2$$

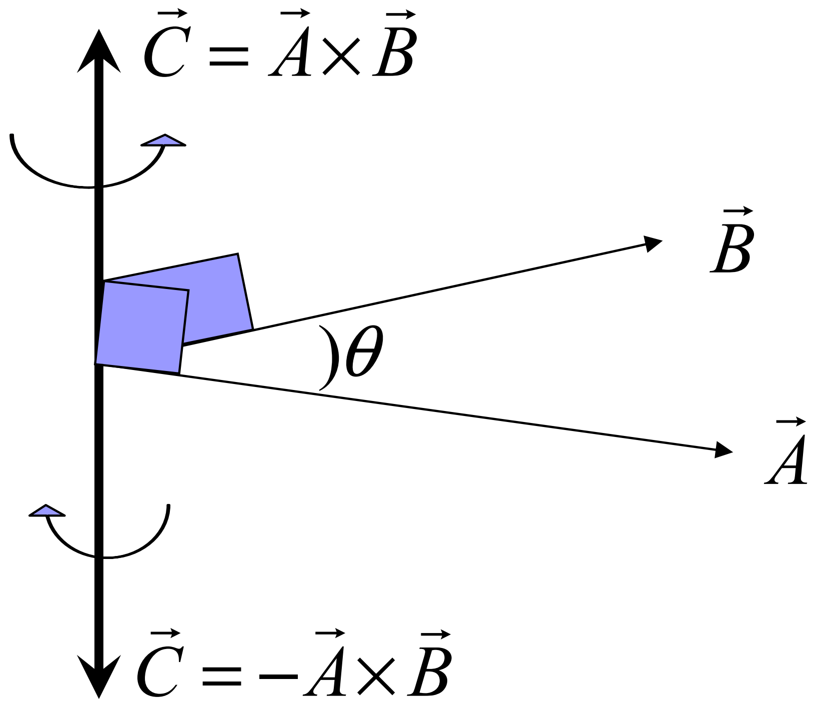
Módulo de un vector

$$\vec{A}\bullet\vec{B}=\vec{B}\bullet\vec{A}$$

Conmutativa

Producto vectorial

- Si A y B son vectores



Producto Vectorial

- Si A y B vectores

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

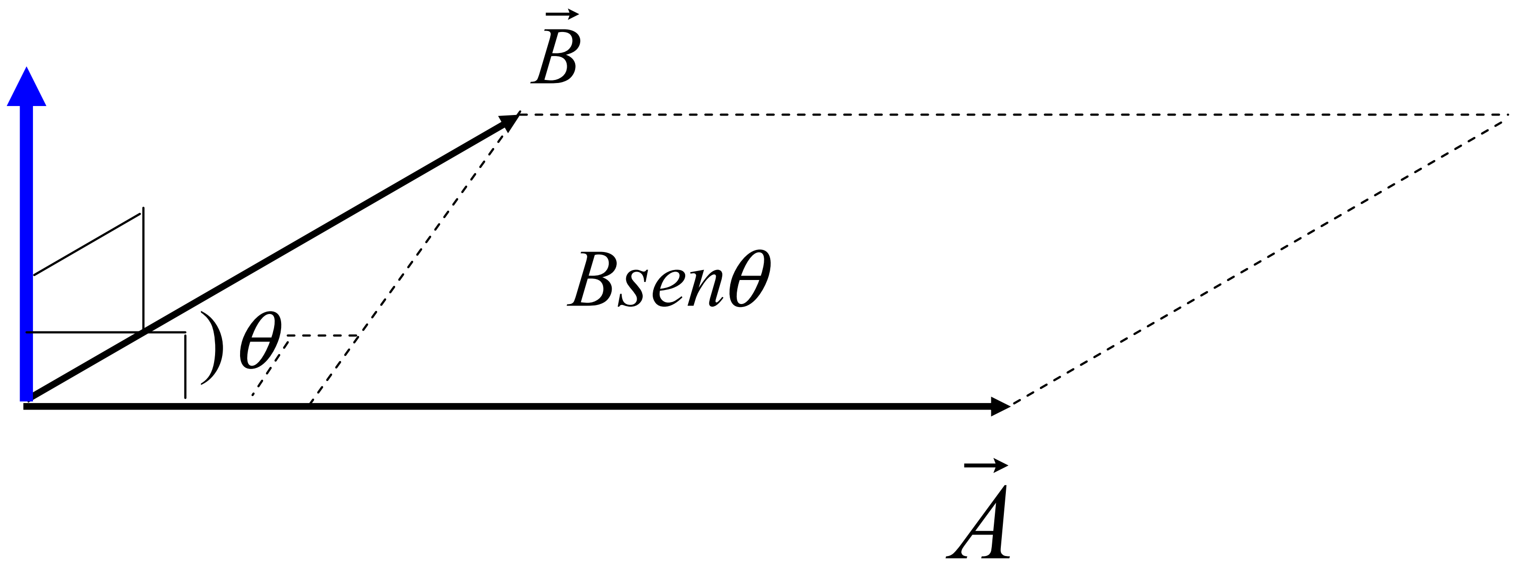
$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Producto vectorial

- Interpretación geométrica

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$



$$\left|\vec{C}\right| = área_{\square} = ABsen\theta$$

Producto vectorial

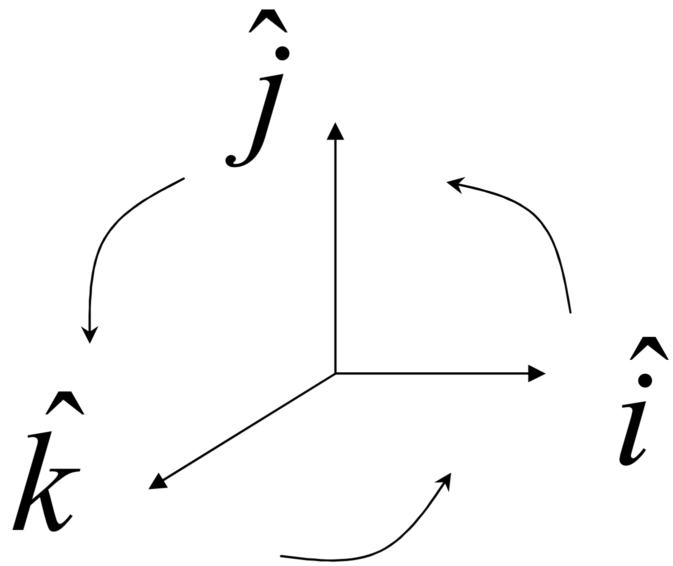
- Propiedades

$$\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k}$$

$$\hat{j}\times\hat{k}=\hat{i}$$

$$\hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$$

$$\hat{i}\times\hat{i}=\hat{j}\times\hat{j}=\hat{k}\times\hat{k}=0$$



Triple producto escalar

- Dado tres vectores A,B,C
- El triple producto escalar da como resultado un escalar

$$\boxed{\vec{A}\bullet\vec{B}\times\vec{C}}$$

Triple producto vectorial

- Dado tres vectores A,B,C el producto triple es

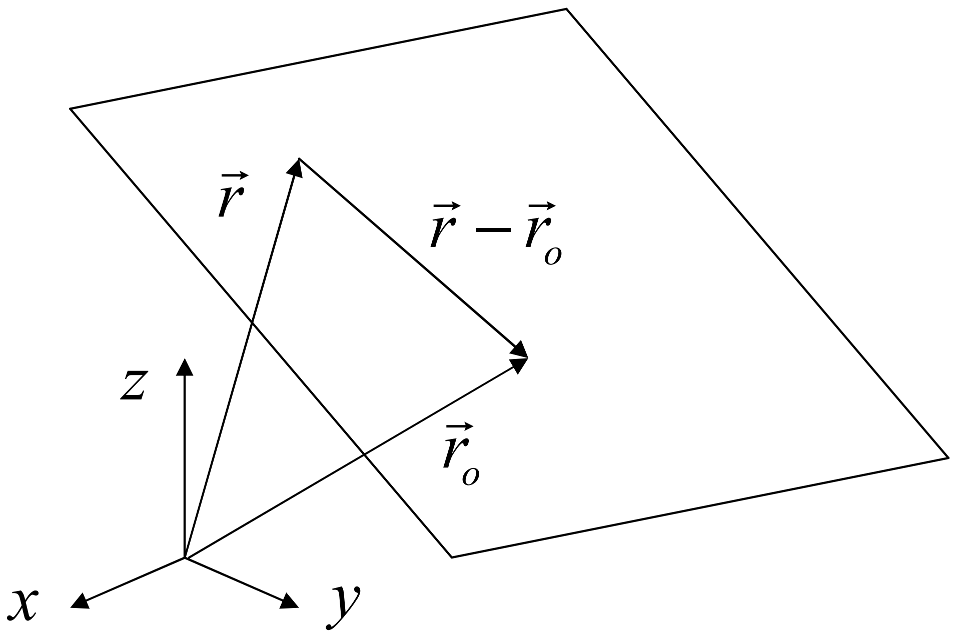
$$\boxed{\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})}$$

- Propiedades

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \bullet \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \bullet \vec{B})\vec{C}$$

Ecuación del plano

- Ecuación del plano



$$\boxed{(\vec{r}-\vec{r}_o)\bullet\vec{k}=0}$$

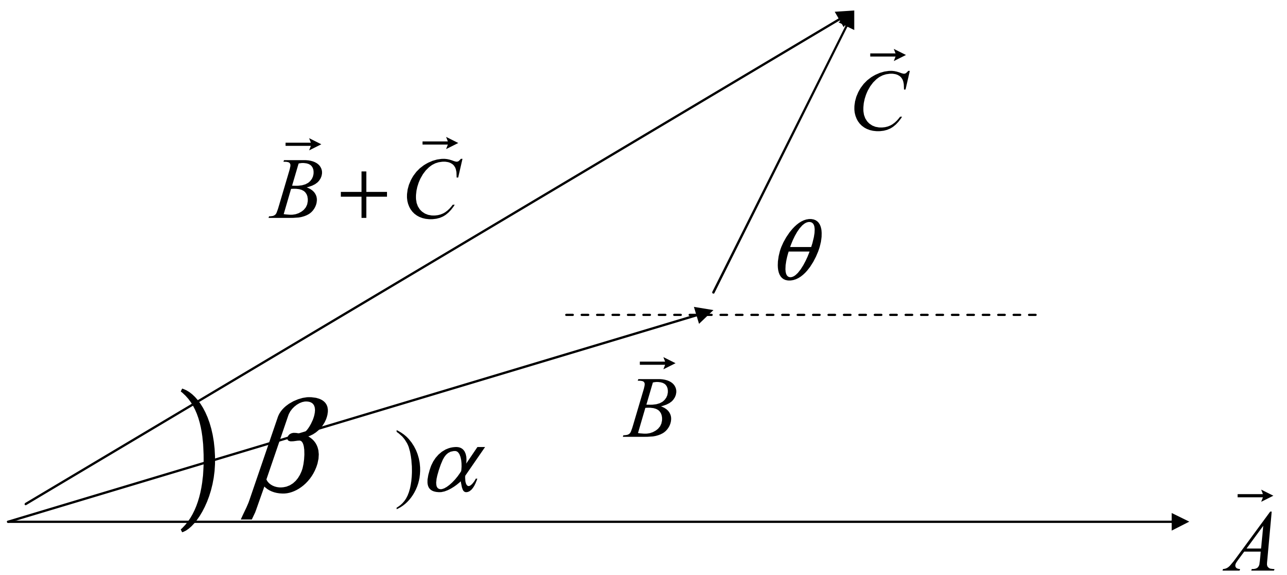
Vector dirección del plano

$$\vec{k}=(k_x,k_y,k_z)$$

Ejercicio

- Si A,B,C son vectores, mostrar la expresión conocida como propiedad distributiva

$$\vec{A}\bullet(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\bullet\vec{B}+\vec{A}\bullet\vec{C}$$



Referencias

- Física Universitaria, Vol2, Sears, Zemansky, Young, Fredmann, Addison Longman, México, 1999
- Física I, Mecánica, Notas de Aula, Marco A. Merma Jara, Lima 2013